

Geometría II

Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría II

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2019-20.

Grado Matemáticas.

Descripción Parcial del Tema 2. Formas Bilineales Simétricas.

Fecha 5 de mayo de 2020.

Ejercicio 1. Consideramos sobre \mathbb{R}^3 la métrica g cuya forma cuadrática asociada es:

$$\omega(x, y, z) = ax^2 + 2xy + y^2 + 2yz + az^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Encontrar los valores de a para los que g es definida positiva.

Tenemos que la matriz asociada a g en la base usual es:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Para que A sea definida positiva, es necesario que todos los menores principales sean positivos. Por tanto,

$$|a| = a \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \quad |A| = a^2 - 2a = a(a - 2)$$

Por tanto, para que g sea definida positiva es necesario que $a > 2$.

2. Para $a = 0$, obtener la base que nos da el Teorema de Sylvester.

Sea $\mathcal{B}_S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ Tengo que $rg(A) = 2$, por lo que $Nul(g) = 1$. Obtengo $\bar{e}_3 \in Ker(g)$.

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(u, v) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e}_3 = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}_u}^t = e_1 - e_3$.

$$g(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 0$$

Sea $\bar{e}_1 = e_2$.

$$g(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = g(e_2, e_2) = 1$$

Busco ahora $\bar{e}_2 \in \langle \bar{e}_1 \rangle^\perp$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}_1 \rangle^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(\bar{e}_1, v) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Sea $\bar{e}_2 = (1, -1, 0)^t$. Tenemos que:

$$g(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) - 2g(e_1, e_2) = 0 + 1 - 2 = -1$$

Por tanto, dado $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tenemos que:

$$M(g; \mathcal{B}_S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Para $a = 1$, encontrar la ecuación reducida de la cuádrica

$$ax^2 + 2xy + y^2 + 2yz + az^2 = m - 5$$

donde m es el último dígito de vuestro DNI.

Como $m - 5$ es una constante, obtengo en primer lugar la expresión reducida de ω para $a = 1$. Es decir, clasifico la matriz siguiente:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tengo que $|A| = 1 - 1 - 1 = -1$. Además, g no es definida negativa, ya que $g(e_1, e_1) = 1$. Por tanto, tenemos que:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en la Base de Sylvester, tenemos que:

$$\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2$$

Por tanto, la expresión reducida de la cuádrica dada es:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = m - 5$$

Ejercicio 2. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Sean A, B dos matrices simétricas reales de orden 2 tales que A^2 y B^2 son congruentes sobre \mathbb{R} . Entonces, A y B son congruentes sobre los complejos.

Veamos en primer lugar que, dado $A \in S_2(\mathbb{R})$, se cumple lo siguiente:

$$A^2 = 0 \implies A = 0 \quad (1)$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A^2 = 0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a + c) \\ b(a + b) & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 0 &\implies a = b = 0 \\ b^2 + c^2 = 0 &\implies b = c = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 0$.

Veamos ahora que, dada $A \in S_2(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$rg(A) = rg(A^2) \quad (2)$$

Tenemos que $0 \leq rg(A) \leq 2$:

- Supongamos que $rg(A) = 2$.
Tenemos que $|A| \neq 0 \implies |A^2| = |A|^2 \neq 0 \implies rg(A^2) = 2$.
- Supongamos que $rg(A) = 1$.
Tenemos que $|A| = 0$ pero $A \neq 0 \implies |A^2| = |A|^2 = 0 \implies rg(A^2) < 2$.
Como $A \neq 0$, por la E. 1, tenemos que $A^2 \neq 0$. Por tanto, $rg(A^2) > 0$.
En conclusión, tenemos que $rg(A^2) = 1$.
- Supongamos que $rg(A) = 0$.
Entonces, $A = 0 \implies A^2 = 0 \implies rg(A^2) = 0$.

Por tanto, $rg(A) = rg(A^2)$.

Procedemos ahora a demostrar lo pedido. Como $A^2 \sim_c B^2$, se tiene que:

$$rg(A) \stackrel{Ec. 2}{=} rg(A^2) \stackrel{A^2 \sim_c B^2}{=} rg(B^2) \stackrel{Ec. 2}{=} rg(B)$$

Por tanto, tenemos que $rg(A) = rg(B)$.

Por el Teorema de Sylvester en el caso de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $rg(A) = rg(B) \implies A \sim_c B$ sobre \mathbb{C} .

Por tanto, es **cierto**.

2. Sea g una métrica sobre \mathbb{R}^3 y $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos planos vectoriales distintos. Si g es definida positiva sobre U_1 y U_2 , entonces g es definida positiva en \mathbb{R}^3 .

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, y sea:

$$A = M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que es una métrica.

Sea $U_1 = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, $U_2 = \mathcal{L}(\{e_2, e_3\})$. Tenemos que g es definida positiva sobre ambos subespacios, pero

$$|A| = 8 - 10^2 < 0$$

Por tanto, tenemos que g no puede ser definida positiva. Por tanto, es **falso**.

3. Sea (V^2, g) un plano vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base con $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1$, $g(e_1, e_2) \neq 0$ y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo dado por:

$$f(e_1) = e_2 \quad f(e_2) = e_1.$$

Entonces f es un endomorfismo autoadjunto.